

3.3 光の伝搬とマクスウェルの方程式²⁾

3.3.1 マクスウェル方程式と固有値問題

この節は、前節で述べたような誘電テンソル $\tilde{\epsilon}(M)$ をもった媒質中を光が伝搬するときどのような波として伝わるのかを調べるのが目的である。光は電磁波であるから、その伝搬はマクスウェルの方程式で記述できる。ややめんどろな式が続くが辛抱して欲しい。(ベクトル解析になじみのない読者は結果のみを知っていただければ十分である。)

光の電界ベクトルを E 、電束密度ベクトルを D 、磁界ベクトルを H 、磁束密度ベクトルを B 、電流を J とすると

$$\begin{aligned} \text{rot } E &= -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \text{rot } H &= \frac{\partial D}{\partial t} + J \end{aligned} \quad (3.17)$$

ここに単位系は S I 系を用いている。

いま簡単のため、伝導電流も分極電流(変位電流)の中に繰り込むことにより、 $J=0$ と置く。前節で述べたように

$$B = \mu_0 H$$

$$D = \tilde{\epsilon} \epsilon_0 E$$

なる関係が成り立つので式(3.17)は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \text{rot } E &= -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} \\ \text{rot } H &= \tilde{\epsilon} \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.18)$$

式(3.18)の解として、波数ベクトルを K として、次式の平面波を考える。

$$E = E_0 \exp(-i\omega t) \cdot \exp(iK \cdot r)$$

$$H = H_0 \exp(-i\omega t) \cdot \exp(iK \cdot r)$$

(3.19)

ここに E_0 , H_0 は時間や距離に依存しない定数ベクトルである。この式を式(3.18)に代入すると、

$$K \times E = \omega \mu_0 H$$

$$K \times H = -\omega \tilde{\epsilon} \epsilon_0 E$$

となる。

両式から H を消去し、固有方程式として

$$(E \cdot K)K - |K|^2 E + (\omega/c)^2 \tilde{\epsilon} E = 0 \quad (3.20)$$

が得られる。(問題 3.1 参照)この式を導くに当たって $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ を用いた。

この式を解いて K の固有値と対応する電界ベクトル E の固有関数を求めよう。ここで複素屈折率 N 、すなわち、 $N = n + ik$ を導入する。ここに n は屈折率、 κ は消光係数である。媒質中において波数 K は $K = \omega N / c = \omega n / c + i\omega \kappa / c$ で表される¹⁾。波数ベクトルの向きに平行で長さが N であるような屈折率ベクトル N を用いると、(3.19)の第1式は

$$E = E_0 \exp\{-i\omega(t - \mathbf{N} \cdot \mathbf{r} / c)\} \quad (3.21)$$

となり、固有方程式(3.20)は

$$N^2 E - (E \cdot \mathbf{N})\mathbf{N} - \tilde{\epsilon} E = 0 \quad (3.22)$$

によって記述できる。以下では、2.3 に述べた2つの配置(ファラデー配置とフォークト配置)について固有値を求める。

3.3.2 ファラデー配置の場合($\theta=0$)

磁化が z 軸方向にあるとして、 z 軸に平行に進む波($\mathbf{N} // z$)に対して式(3.21)は、

$$E = E_0 \exp\{-i\omega(t - Nz/c)\} \quad (3.23)$$

と表される。固有方程式(3.22)は

$$\begin{pmatrix} N^2 - \epsilon_{xx} & -\epsilon_{xy} & 0 \\ \epsilon_{xy} & N^2 - \epsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (3.24)$$

と書ける。この方程式が $E \neq 0$ の解をもつためには、上式において E の係数の行列式が0でなければならない。こうして次の永年方程式を得る。(問題 3.2 参照)

¹⁾波数 K は $K = 2\pi / \lambda'$ となる。ここに λ' は媒質中での波長で、媒質中での光速を c' とすると $\lambda' = 2\pi c' / \omega$ と表される。媒質中での光速 c' は屈折率を n とすると c/n で与えられるから、 $K = \omega n / c$ である。ここで屈折率を拡張して複素屈折率 N 、すなわち、 $N = n + ik$ を導入すると、 $K = \omega N / c = \omega n / c + i\omega \kappa / c$ となる。

$$\begin{vmatrix} N^2 - \epsilon_{xx} & -\epsilon_{xy} & 0 \\ \epsilon_{xy} & N^2 - \epsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon_{zz} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.25)$$

これより、 $(N^2 - \epsilon_{xx})^2 + \epsilon_{xy}^2 = 0$ となり、 N^2 の固有値として 2 個の値

$$N_{\pm}^2 = \epsilon_{xx} \pm i\epsilon_{xy} \quad (3.26)$$

を得る。これらの固有値に対応する固有関数は、

$$E_{\pm} = \frac{E_0}{2} (i \pm ij) \exp\{-i\omega(t - \frac{N_{\pm} z}{c})\} \quad (3.27)$$

ここに i, j は x, y 方向の単位ベクトルである。 E_+ 、 E_- は、それぞれ、右円偏光、左円偏光に対応する。なぜ円偏光になるかを、 E_+ について考えてみよう。この電界ベクトルの x 成分 E_{+x} および y 成分 E_{+y} の実数部はそれぞれ、

$$\begin{aligned} E_{+x} &= \frac{E_0}{2} \cos\left\{\omega\left(t - \frac{N_+ z}{c}\right)\right\} \\ E_{+y} &= \frac{E_0}{2} \sin\left\{\omega\left(t - \frac{N_+ z}{c}\right)\right\} \end{aligned} \quad (3.28)$$

となり、その軌跡は円になる。

いま、位置を $z=0$ に固定して考えると、 $E_{+x} = (E_0/2)\cos \omega t$ 、 $E_{+y} = (E_0/2)\sin \omega t$ となり、 x 成分は y 成分に対し 90° 位相が進んでいるので、 E_+ のベクトル軌跡は、図 3.3 に示すように右回りの円を描く。このことは、オシロスコープの x 軸に $\sin \omega t$ で変化する信号を入れ、 y 軸に $\cos \omega t$ で変化する信号を入れたときに、そのリサージュ図形が右回りの円になることを思い浮かべれば理解しやすい。

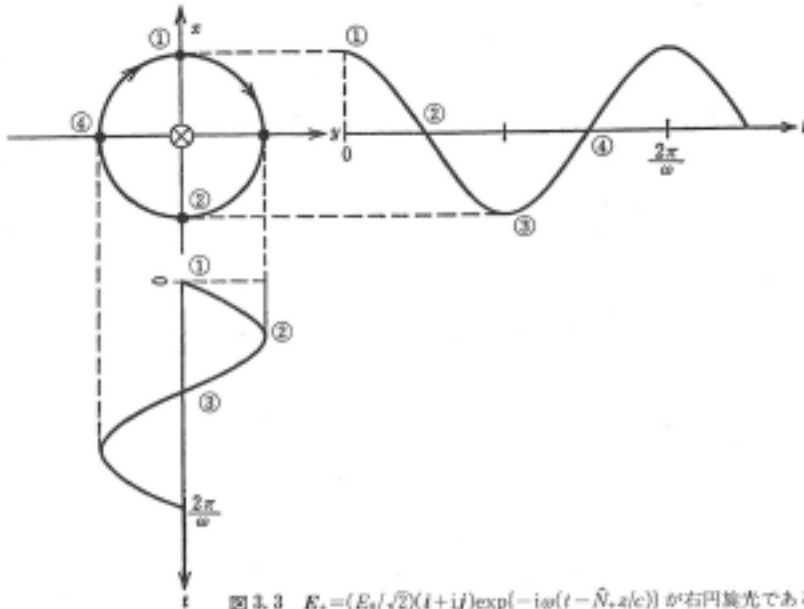


図 3.3 $E_+ = (E_0/\sqrt{2})(i + j)\exp\{-i\omega(t - \hat{N}_+ z/c)\}$ が右円偏光であること

以上のことから式(3.13)で示されるような誘電テンソル (M) を持った媒質中を M と平行に伝わる波の固有状態は左まわり、または、右まわりの円偏光であることが示された。ここで、もし $\vec{\epsilon}$ テンソルの非対角成分 ϵ_{xy} がなければ、(3.25)の固有値は $N_{\pm}^2 = \epsilon_{xx}$ となって、円偏光はもはや固有状態ではなくなり、旋光性や円二色性は生じない。このことから、旋光性および円二色性の起源は $\vec{\epsilon}$ テンソルの非対角成分にあることが理解されたと思う。

3.3.3 フォークト配置の場合 磁化 M に垂直な x 軸に平行に

進む波(N/x)に対しては、式(3.21)は、

$$E = E_0 \exp\{-i\omega(t - Nx/c)\} \quad (3.29)$$

と表される。固有方程式(3.22)は

$$\begin{pmatrix} -\epsilon_{xx} & -\epsilon_{xy} & 0 \\ \epsilon_{xy} & N^2 - \epsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & N^2 - \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (3.30)$$

となるので、永年方程式は

$$\begin{vmatrix} -\epsilon_{xx} & -\epsilon_{xy} & 0 \\ \epsilon_{xy} & N^2 - \epsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & N^2 - \epsilon_{zz} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.31)$$

で表される。これを解くと、 $\{\epsilon_{xy}^2 - \epsilon_{xx}(N^2 - \epsilon_{xx})\}(N^2 - \epsilon_{zz}) = 0$ となり、 N^2 の固有値として

$$N_1^2 = \epsilon_{xx} + \frac{\epsilon_{xy}^2}{\epsilon_{xx}} \text{ および } N_2^2 = \epsilon_{zz} \text{ という 2 つの解を得る。} \quad (3.32)$$

N_1 および N_2 に対応する固有関数は

$$\begin{aligned} E_1 &= A \exp\left\{-i\omega\left(t - \frac{N_1}{c}x\right)\right\}(\varepsilon_{xy}i - \varepsilon_{xx}j) \\ E_2 &= B \exp\left\{-i\omega\left(t - \frac{N_2}{c}x\right)\right\}k \end{aligned} \quad (3.33)$$

となり、複屈折を生じる。このような磁化と光の進行方向が直交する磁気光学効果はコットンムートン効果として知られ、3.7 に詳しく述べる。

3.3.4 誘電率テンソルと導電率テンソルの関係

次に前節で先送りにした、 $\tilde{\varepsilon}$ テンソルと $\tilde{\sigma}$ テンソルの関係を導いておく。

D を分極 P を用いて表すと

$$D = \varepsilon_0 E + P$$

マクスウェル方程式(3.17)の第2式の右辺は、

$$\frac{\partial D}{\partial t} + J = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial t} + J$$

となるが、この式の右辺第2項は分極電流(変位電流)、第3項は伝導電流であるから、2つの電流の和を J' とおき、さらに

$$J' = \tilde{\sigma}E$$

と置き換えると、

$$\text{rot } H = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} + \tilde{\sigma}E \quad (3.34)$$

と書き表すことができる。さらに H および E に式(3.21)の形の解を仮定すると式(3.17)の第2式は

$$K \times H = -\omega\varepsilon_0 \left(1 + i \frac{\tilde{\sigma}}{\omega\varepsilon_0}\right) E = -\omega\varepsilon_0 \tilde{\varepsilon} E$$

となる。ここに 1 は2階の単位テンソルである。これより、誘電テンソルと伝導率テンソルの間の関係として、

$$\tilde{\varepsilon} = 1 + i \frac{\tilde{\sigma}}{\omega\varepsilon_0} \quad (3.35)$$

を得る。テンソル成分で表せば、

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + i \frac{\sigma_{ij}}{\omega\varepsilon_0} \quad (3.36)$$

が導かれた。ここに、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。

• 3.3節のまとめ

光の伝搬をマクスウェルの方程式で記述すると、磁化された等方性物質の屈折率 N は $N_{\pm}^2 = \varepsilon_{xx} \pm i\varepsilon_{xy}$ で与えられる2つの固有値をとり、それぞれが右円偏光および左円偏光に対応する。(ここに、 ε_{xx} は誘電テンソルの対角成分、 ε_{xy} は非対角成分である。) もし、 ε_{xy} が0であれば、円偏光は固有関数ではなく、磁気光学効果は生じない。

3.4 ファラデー効果の現象論

3.3節で述べたようにテンソルの非対角成分が存在すると、物質の左右円偏光に対する応答の違いを生じ、その結果ファラデー効果が生じる。ファラデー効果の回転角、楕円率などが誘電テンソル $\tilde{\varepsilon}$ の成分を使ってどのように書き表せるかを述べるのが、この節の目的である。

結論から先に述べると、ファラデー回転角 θ_F 、ファラデー楕円率 ρ_F は式(3.43)のように、 ε_{xy} の実数部と虚数部との一次結合で与えられることが導かれる。これを導くために、まず、右円偏光および左円偏光に対する屈折率 n_+ と n_- 、消光係数 κ_+ と κ_- および ε_{xy} との関係を導いておこう。

3.4.1 左右円偏光に対する光学定数の差と誘電率テンソルの成分の関係

3.3節に述べたことから、磁化と平行に進む光の複素屈折率の固有値は式(3.26)

で与えられる。ここに $N_+ = n_+ + i\kappa_+$ および $N_- = n_- + i\kappa_-$ である。ここで、

$$\Delta n = n_+ - n_-; \Delta \kappa = \kappa_+ - \kappa_-; n = \frac{n_+ + n_-}{2}; \kappa = \frac{\kappa_+ + \kappa_-}{2}$$

という置き換えをすると、

$$N_{\pm} = n \pm \frac{\Delta n}{2} + i \left(\kappa \pm \frac{\Delta \kappa}{2} \right) = (n + i\kappa) \pm \frac{1}{2} (\Delta n + i\Delta \kappa) \equiv N \pm \frac{1}{2} \Delta N \quad (3.37)$$

となる。ここに

$$\Delta N = N_+ - N_- = \Delta n + i\Delta\kappa \quad (3.38)$$

である。式(3.37)の2番目の式を、式(3.26)に代入して両辺の実数部同士、虚数部同士比較することによって

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{xx} &= n^2 - \kappa^2 \\ \varepsilon''_{xx} &= 2n\kappa \\ \varepsilon'_{xy} &= n\Delta\kappa + \kappa\Delta n \\ \varepsilon''_{xy} &= \kappa\Delta\kappa - n\Delta n \end{aligned} \quad (3.39)$$

が得られる。(問題 3.3 参照)ただし、 Δn 、 $\Delta\kappa$ が n 、 κ に比べて十分小さいとして、高次の項を無視した。

式(3.39)の最初の2式は通常非磁性の媒質で成り立つ式と同じである。磁化の存在は誘電率テンソルの非対角成分を通じて左右円偏光に対する光学定数の差 Δn 、 $\Delta\kappa$ を生じるが、 Δn と $\Delta\kappa$ は式(3.37)の後の2式を逆に解いて、次式のように表される。

$$\begin{aligned} \Delta n &= \frac{\kappa\varepsilon'_{xy} - n\varepsilon''_{xy}}{n^2 + \kappa^2} \\ \Delta\kappa &= \frac{n\varepsilon'_{xy} + \kappa\varepsilon''_{xy}}{n^2 + \kappa^2} \end{aligned} \quad (3.40)$$

この式を、式(3.38)で定義される ΔN に書き直すと

$$\Delta N = \Delta n + i\Delta\kappa = \frac{i(n - i\kappa)(\varepsilon'_{xy} + i\varepsilon''_{xy})}{n^2 + \kappa^2} = \frac{i\varepsilon_{xy}}{\sqrt{\varepsilon_{xx}}} \quad (3.41)$$

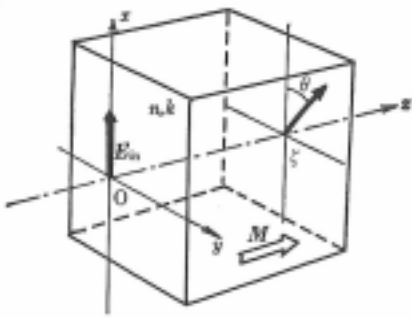


図 3.4 座標系のとり方

光の進行方向(一磁化の方向)をz軸正の向きに、入射直線偏光の電界の振動方向をx軸にとり、回転角は図の方向を正とする。

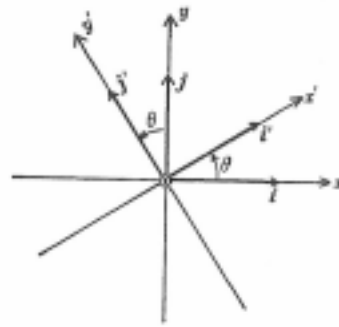


図 3.5 z軸のまわりに θ だけ回転した座標系

z軸は紙面に垂直上向きにとる。

3.4.2 ファラデー効果と誘電率テンソル

以上で誘電率テンソルと ΔN の関係が導かれたので、今度は観測される E_r 、 E_l が ΔN を用いてどのように表せるかを述べる。

まず、図 3.4 に示すように xz 面を振動面とする直線偏光 E_{in} が物質に入射したとする。ここに光の進行方向は z 軸の向きである。 x 軸の単位ベクトルを i 、 y 軸の単位ベクトルを j とすると入射光の電界ベクトルは次式で与えられる。

$$E_{in} = E_0 \exp(-i\omega t) i \quad (3.42)$$

ここで、右円偏光単位ベクトル r と、左円偏光単位ベクトル l を次式のように定義する。

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{\sqrt{2}}(i + ij) \\ l &= \frac{1}{\sqrt{2}}(i - ij) \end{aligned} \quad (3.43)$$

式(3.42)を r と l を使って表すと、

$$E_{in} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \exp(-i\omega t)(r + l) \quad (3.44)$$

のように表される。

物質中の屈折率は右円偏光に対しては N_+ 、左円偏光に対しては N_- である。表面を $z=0$ とし物質中の $z=\zeta$ の位置では、位相がそれぞれ $\exp(i N_+ \zeta/c)$ および $\exp(i\omega N_- \zeta/c)$ だけ進むので、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{out} &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} \exp(-i\omega t) \left\{ \exp(i\omega N_+ \zeta / c) \mathbf{r} + \exp(i\omega N_- \zeta / c) \mathbf{l} \right\} \\ &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} \exp\left\{-i\omega\left(t - \frac{N}{c}\zeta\right)\right\} \left\{ \exp(i\omega \frac{\Delta N}{2c} \zeta) \mathbf{r} + \exp(-i\omega \frac{\Delta N}{2c} \zeta) \mathbf{l} \right\} \end{aligned} \quad (3.45)$$

と表される。ここで $N_+ = N + \Delta N / 2$, $N_- = N - \Delta N / 2$ と置き換えた。

ここで、ふたたび、もとの xy 座標系に戻すと

$$E_{out} = \frac{E_0}{2} \exp\left\{-i\omega\left(t - \frac{N}{c}\zeta\right)\right\} \times \left[\left\{ \exp(i\omega \frac{\Delta N}{2c} \zeta) + \exp(-i\omega \frac{\Delta N}{2c} \zeta) \right\} \mathbf{i} + i \left\{ \exp(i\omega \frac{\Delta N}{2c} \zeta) - \exp(-i\omega \frac{\Delta N}{2c} \zeta) \right\} \mathbf{j} \right] \quad (3.45')$$

さらに式(3.38)を使って書き直すと

$$E_{out} = E_0 \exp\left\{-i\omega\left(t - \frac{N}{c}\zeta\right)\right\} \times \left[\left\{ \cos\left(\frac{\omega\Delta n}{2c} \zeta\right) - i \frac{\omega\Delta\kappa}{2c} \zeta \sin\left(\frac{\omega\Delta n}{2c} \zeta\right) \right\} \mathbf{i} - \left\{ \sin\left(\frac{\omega\Delta n}{2c} \zeta\right) + i \frac{\omega\Delta\kappa}{2c} \zeta \cos\left(\frac{\omega\Delta n}{2c} \zeta\right) \right\} \mathbf{j} \right] \quad (3.46)$$

(問題 3.5 参照) 図 3.5 に示すように、座標系を z 軸の回りに $\theta = -(\Delta n \zeta / 2c)$ だけ回転した座標系を $x'y'z'$ で表しその単位ベクトルを i', j', k' とすると、座標変換の式は

$$\begin{pmatrix} i' \\ j' \\ k' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

で表せる。(問題 3.6 参照) これを使って E_{out} は次のように書き直せる。

$$E_{out} = E_0 \exp\left\{-i\omega\left(t - \frac{N}{c}\zeta\right)\right\} \left(i' - i \left(\frac{\omega\Delta\kappa}{2c} \zeta \right) j' \right) \quad (3.48)$$

もし、磁気円二色性がないとすると $\Delta\kappa=0$ であるから、 E_{out} は i' 成分のみとなり、 x' 軸方向の直線偏光であることがわかる。入射直線偏光は x 軸から x' 軸へと だけ回転したのである。これがファラデー回転角 θ_F である。すなわち、ファラデー回転角は

$$\theta_F = -\frac{\omega\Delta n}{2c} \zeta \quad (3.49)$$

となる。回転角 θ_F の符号のとりにかたはここでは右手系にとったが、理科年表などでは観測者からみて右まわりを正にとっているので、この定義による回転角を ϕ_F とすると

$$\phi_F = -\theta_F = \frac{\omega\Delta n}{2c} \zeta \quad (3.50)$$

となる。 $\Delta\kappa \neq 0$ のときは、式(3.48)は x' 軸を長軸、 y' 軸を短軸とする楕円偏光になる。この楕円偏光の楕円率 η_F は短軸と長軸の振幅の比で与えられ、

$$\eta_F = -\frac{\omega\Delta\kappa}{2c} \zeta \quad (3.51)$$

と表される。右円偏光に対する吸収が左円偏光に対する吸収より強いと、出射電界ベクトルの軌跡は左回りの楕円となるので、楕円率は負となる。

いま、複素ファラデー回転角を

$$\Phi_F = \theta_F + i\eta_F \quad (3.52)$$

によって定義すると、

$$\Phi_F = -\frac{\omega}{2c} (\Delta n + i\Delta\kappa) \zeta = -\frac{\omega\Delta N}{2c} \zeta \quad (3.53)$$

と書ける。この式に式(3.41)を代入すると

$$\Phi_F = -\frac{\omega}{2c} \cdot \frac{i\varepsilon_{xy}}{\sqrt{\varepsilon_{xx}}} \zeta \quad (3.54)$$

となり、複素ファラデー回転角は比誘電率の非対角成分 ε_{xy} に比例し、対角成分の平方根に反比例することがわかる。実数部と虚数部に分けて記述すると

$$\begin{aligned} \theta_F &= -\frac{\omega}{2c} \cdot \frac{\kappa\varepsilon'_{xy} - n\varepsilon''_{xy}}{n^2 + \kappa^2} \zeta \\ \eta_F &= -\frac{\omega}{2c} \cdot \frac{n\varepsilon'_{xy} + \kappa\varepsilon''_{xy}}{n^2 + \kappa^2} \zeta \end{aligned} \quad (3.55)$$

このように、ファラデー回転角と楕円率は誘電テンソルの非対角成分の実数部と虚数部の線形結合で表されることがわかった。

実験でファラデー回転角と楕円率が得られたとき、比誘電率の非対角成分を求めるには、

$$\begin{aligned}\varepsilon'_{xy} &= -\frac{2c}{\omega\zeta}(n\eta_F + \kappa\theta_F) \\ \varepsilon''_{xy} &= -\frac{2c}{\omega\zeta}(\kappa\eta_F - n\theta_F)\end{aligned}\quad (3.56)$$

通常ファラデー効果は、透明な領域で測定されるので、式(3.55)において $\kappa=0$ と置くと、

$$\begin{aligned}\theta_F &= -\frac{\omega\varepsilon''_{xy}}{2cn}\zeta \\ \eta_F &= -\frac{\omega\varepsilon'_{xy}}{2cn}\zeta\end{aligned}\quad (3.57)$$

となつて、回転角が ε_{xy} の虚数部に、楕円率が ε_{xy} の実数部に対応することがわかる。

ファラデー楕円率は磁気円二色性(MCD)と単純な式で結ぶことができる。よく知られているように、光吸収の吸収係数 α は $\alpha = 2\omega\kappa/c$ で与えられる。円二色性 $\Delta\alpha$ は右円偏光の吸収係数 α_+ と左円偏光の吸収係数 α_- との差で表されるので

$$\Delta\alpha = \alpha_+ - \alpha_- = \frac{2\omega}{c}\Delta\kappa$$

となり、これに式(3.51)を使うとこの式は、次式のようになる。

$$\Delta\alpha = \frac{2\omega}{c} \cdot \left(-\frac{2c}{\omega\zeta}\right) = -\frac{4\eta_F}{\zeta}\quad (3.58)$$

従つて、MCDは単位長あたりのファラデー楕円率の4倍に等しい。

具体例

やや抽象的な式が続いたので、多少具体的な例を示しておこう。

図3.6にはビスマスを添加したYIG(イットリウム鉄ガーネット: $\text{Y}_{3-x}\text{Bi}_x\text{Fe}_5\text{O}_{12}$)の誘電テンソルの対角および非対角成分の実数部および虚数部のスペクトルを掲げる。²この物質はフェリ磁性を示す絶縁性結晶で、2.5 eV (~500 nmの波長に相当)以下の光エネルギーに対して殆ど透明であることが図3.6(a)の ε''_{xx} のスペクトル(光の吸収を表す)から知られる。ヘリウムネオン・レーザー光(波長633 nm ~ 1.9 eV)を用いた場合には、図より $\varepsilon'_{xx} = 5.3$ 、 $\varepsilon''_{xx} = 0$ と読み取れる。これから光学定数を計算すると $n = 2.3$ と $\kappa = 0$ である。したがつて、式(3.56)が成立する。図3.6(b)から、 $\varepsilon'_{xy} \sim 0$ 、 $\varepsilon''_{xy} \sim 0.005$ と読み取れるので、上式から $\eta_F \sim 0$ 、 $\theta_F \sim -1.1 \times 10^2$ (ラジアン) = -6.3×10^3 (度)を得る。

• 3.4節のまとめ

・長さ ζ の磁性体におけるファラデー回転角 θ_F およびファラデー楕円率 η_F は、左右円偏光に対する屈折率の差 Δn および消光係数の差 $\Delta\kappa$ を用いて

$$\theta_F = -\theta_F = \omega\Delta n\zeta/2c \quad (\theta_F \text{は観測者側から光源を見たとき時計方向を正とする})$$

$$\eta_F = -\omega\Delta\kappa\zeta/2c$$

・と表される。 ε_{xy} と Δn 、 $\Delta\kappa$ の関係式を用いて

$$\theta_F = -\frac{\omega}{2c} \cdot \frac{\kappa\varepsilon'_{xy} - n\varepsilon''_{xy}}{n^2 + \kappa^2} \zeta$$

$$\eta_F = -\frac{\omega}{2c} \cdot \frac{n\varepsilon'_{xy} + \kappa\varepsilon''_{xy}}{n^2 + \kappa^2} \zeta$$

複素ファラデー回転角を $\Phi = \theta_F + i\eta_F$ と定義すると

$$\Phi_F = -\frac{\omega}{2c} \cdot \frac{i\varepsilon_{xy}}{\sqrt{\varepsilon_{xx}}} \zeta$$

$$\varepsilon_{xy} = (2c/\omega) \Phi_F \sqrt{\varepsilon_{xx}}$$

・なる関係が導かれる

² この文献では誘電テンソルを次のように定義している。

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & -i\varepsilon_1 & 0 \\ i\varepsilon_1 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{pmatrix}$$

この定義は伝統的によく用いられる。 ε_0 、 ε_1 と、われわれの誘電率テンソルの成分 ε_{xx} 、 ε_{xy} との間には $\varepsilon_0 = \varepsilon_{xx}$ および $\varepsilon_1 = i\varepsilon_{xy}$ という関係がある。図3.6は、この関係を用いて、われわれの定義に書き直してある。