工学系12大学大学院単位互換e-Learning科目

磁気光学入門第３回：電磁気学に基づく磁気光学の理論（１）

佐藤勝昭
東京農工大学

電磁気学に基づく磁気光学の理論（1）

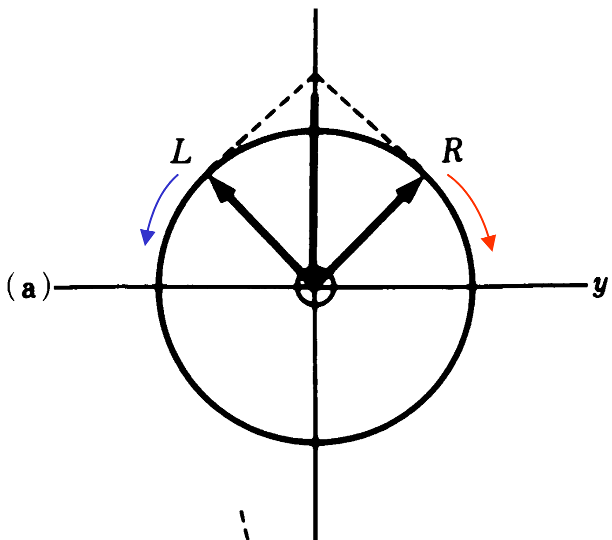
- 今回の講義では磁気光学効果が媒体のどのような性質に基づいて生じるかをマクロな立場に立ってご説明します。
- ここでは媒体のミクロな性質には目をつぶって、媒体を連続体のように扱い、偏光が伝わる様子を電磁波の基本方程式であるマクスウェルの方程式を使って記述します。
- このとき媒体の応答を誘電率を使って表します。

円偏光と旋光性・円二色性

- 以下では旋光性や円二色性が左右円偏光に対する媒体の応答の差に基づいて生じることを説明します

直線偏光は左右円偏光の合成

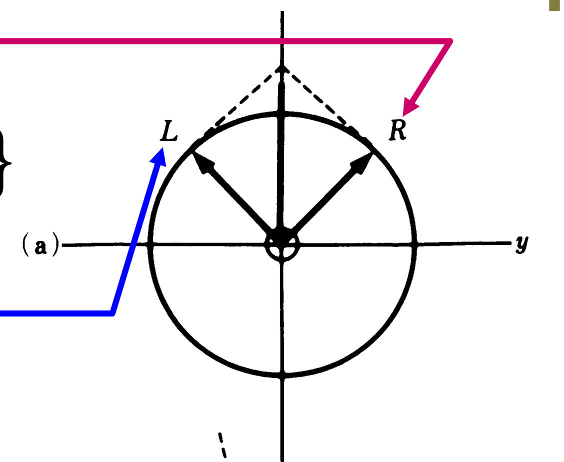
- 直線偏光の電界ベクトルの軌跡は図(a)のように、振幅と回転速度が等しい右円偏光Rと左円偏光Lとの合成で表されます。



図(a)直線偏光は等振幅等速度の左右円偏光に分解できる

式で書くと

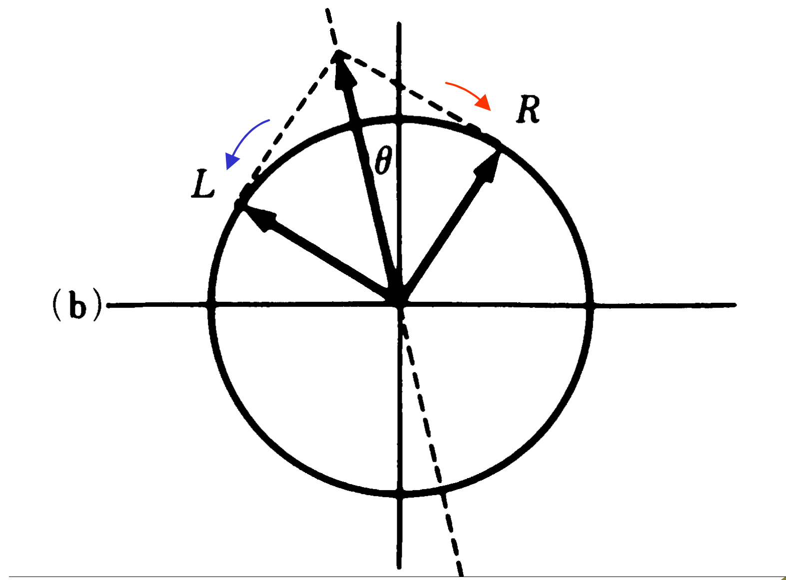
- $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\exp(i\omega t)\,\boldsymbol{i}$
  ここに$\boldsymbol{i}$はx方向の単位ベクトル
- 右円偏光の単位ベクトル$\boldsymbol{r}$は$(\boldsymbol{i}+i\boldsymbol{j})/2^{1/2}$
- 左円偏光の単位ベクトル$\boldsymbol{l}$は$(\boldsymbol{i}-i\boldsymbol{j})/2^{1/2}$
  $\boldsymbol{i}=(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{l})/$となるので
- $\boldsymbol{E}=2^{-1/2}\{\boldsymbol{E}_0\exp(i\omega t)\boldsymbol{r}+\boldsymbol{E}_0\exp(i\omega t)\boldsymbol{l}\}$



左右円偏光の位相が異なる場合

- 媒体を透過した後、図(b)のように左円偏光の位相が右円偏光の位相より進んでいたとすると、合成した電界ベクトルの軌跡も直線で、その向きはもとの偏光の向きからから傾いています。
- これが旋光性です。
回転角は左右円偏光の位相差の1/2です。

図 (b)媒体を通ることにより左円偏光の位相と右円偏光の位相が異なると偏光が回転します



式で書くと

- 右円偏光に対する屈折率n^+
- 左円偏光に対する屈折率n^-

とすると、

- 右円偏光の位相は$\omega n^+ z/c$
- 左円偏光の位相は$\omega n^- z/c$

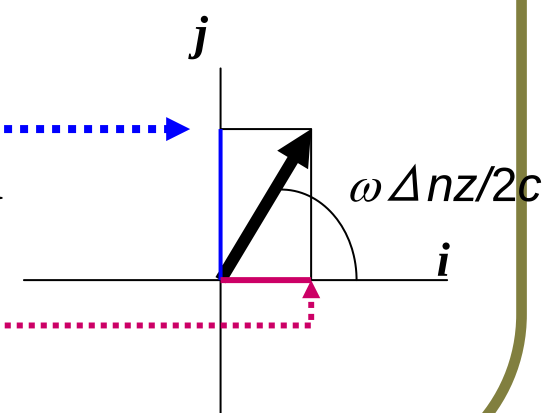
であるから右円偏光と左円偏光の位相差は
$\omega(n^+ - n^-)z/c$

- この半分が回転角になります。

注：nは屈折率、κ(カッパと読む)は消光係数

ベクトルで書くと

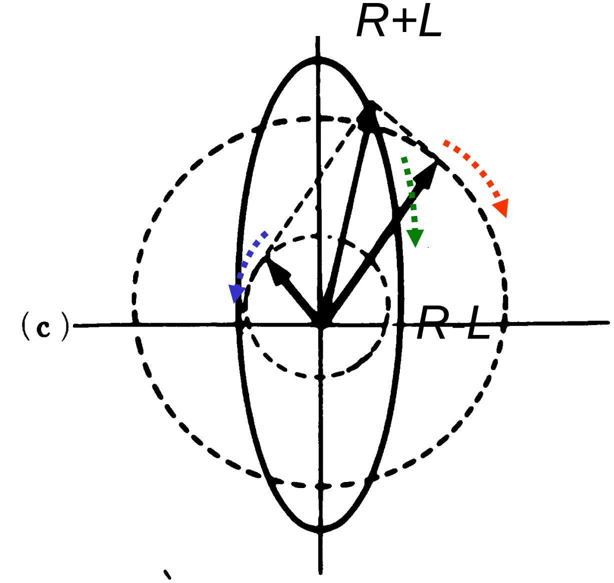
- $\boldsymbol{E}= 2^{-1/2}\boldsymbol{E}_0 \{\exp(i\omega t)\boldsymbol{r}+\exp(i\omega t)\boldsymbol{l}\}$が
右円偏光に対する屈折率n^+、左円偏光に対する屈折率n^- の環境を通過すると、
- $\boldsymbol{E}= 2^{-1/2}\boldsymbol{E}_0 [\exp\{i\omega(t-n^+z/c)\}\boldsymbol{r}+\exp\{i\omega(t-n^-z/c)\}\boldsymbol{l}]$
これを直交系に戻すと、
- $\boldsymbol{E}= 2^{1/2}\boldsymbol{E}_0\exp(i\omega t)\exp(- i\omega nz/c)$
$\times\{\cos(\omega\Delta nz/2c)\boldsymbol{i}+\sin(\omega\Delta nz/2c)\boldsymbol{j}\}$
- ここに$\Delta n=n^+-n^-$, $n=(n^++n^-)/2$



左右円偏光の振幅が異なると

- 媒体を透過した後、（c）のように右円偏光と左円偏光のベクトルの振幅に差が生じると、合成ベクトルの軌跡は楕円になります。
- 楕円の短軸と長軸の比の $\tan^{-1}$ が楕円率角です。

図(c)媒体を通ることにより左円偏光の振幅と右円偏光の振幅が異なると合成した軌跡は楕円になります



式で書くと

- 右円偏光に対する消光係数κ^+
- 左円偏光に対する消光係数κ^-

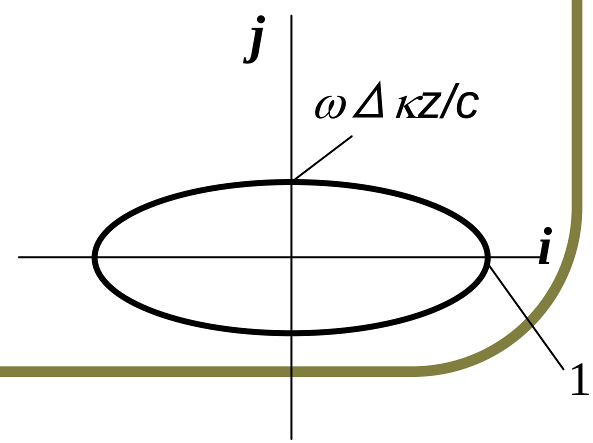
とすると、

- 右円偏光の振幅は$\exp(-\omega\kappa^+ z/c)$
- 左円偏光の振幅は$\exp(-\omega\kappa^- z/c)$

屈折率は左右円偏光に対し同じであると仮定

ベクトルで書くと

- $\boldsymbol{E}= 2^{-1/2}\boldsymbol{E}_0\ \{\exp(i\omega t)\boldsymbol{r}+\exp(i\omega t)\boldsymbol{l}\}$が
右円偏光に対する消光係数κ^+、左円偏光に対する消光係数κ^-の環境を通過すると、
- $\boldsymbol{E}= 2^{-1/2}\boldsymbol{E}_0 \exp\{i\omega(t-nz/c)\}\ [\exp(-\omega\kappa^+ z/c)\ \boldsymbol{r}+ \exp(-\omega\kappa^- z/c)\ \boldsymbol{l}]$
これを直交系に戻すと、
- $\boldsymbol{E}\sim 2^{1/2}\boldsymbol{E}_0\exp(i\omega t)\exp(-\ \omega\ \kappa z/c)\{\boldsymbol{i}\text{-}i\omega\Delta\kappa z/c\boldsymbol{j}\}$
- ここに$\Delta\kappa=\kappa^+-\kappa^-$, $\kappa=(\kappa^+ + \kappa^-)/2$、
また $\omega\Delta\kappa z/c<<1$ とする
- 楕円率角ηは$\eta=\tan^{-1}(\omega\Delta\kappa z/c)$



注：κ(カッパと読む)は消光係数

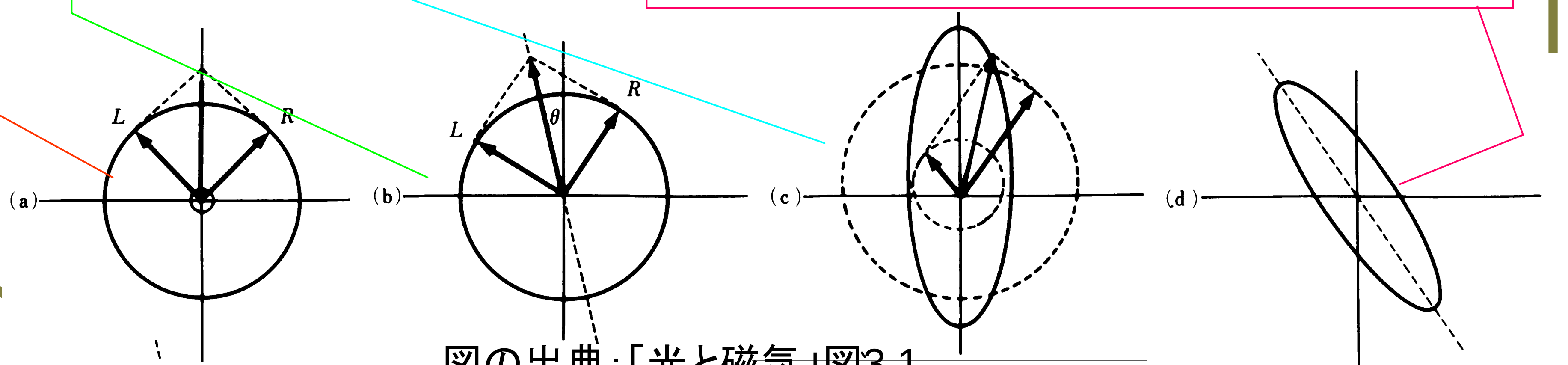
円偏光と磁気光学効果:まとめ

直線偏光は等振幅等速度の左右円偏光に分解できる

媒体を通ることにより左円偏光の位相と右円偏光の位相が異なると旋光する

媒体を通ることにより左円偏光の振幅と右円偏光の振幅が異なると楕円になる

一般には、主軸の傾いた楕円になる



図の出典:「光と磁気」図3.1

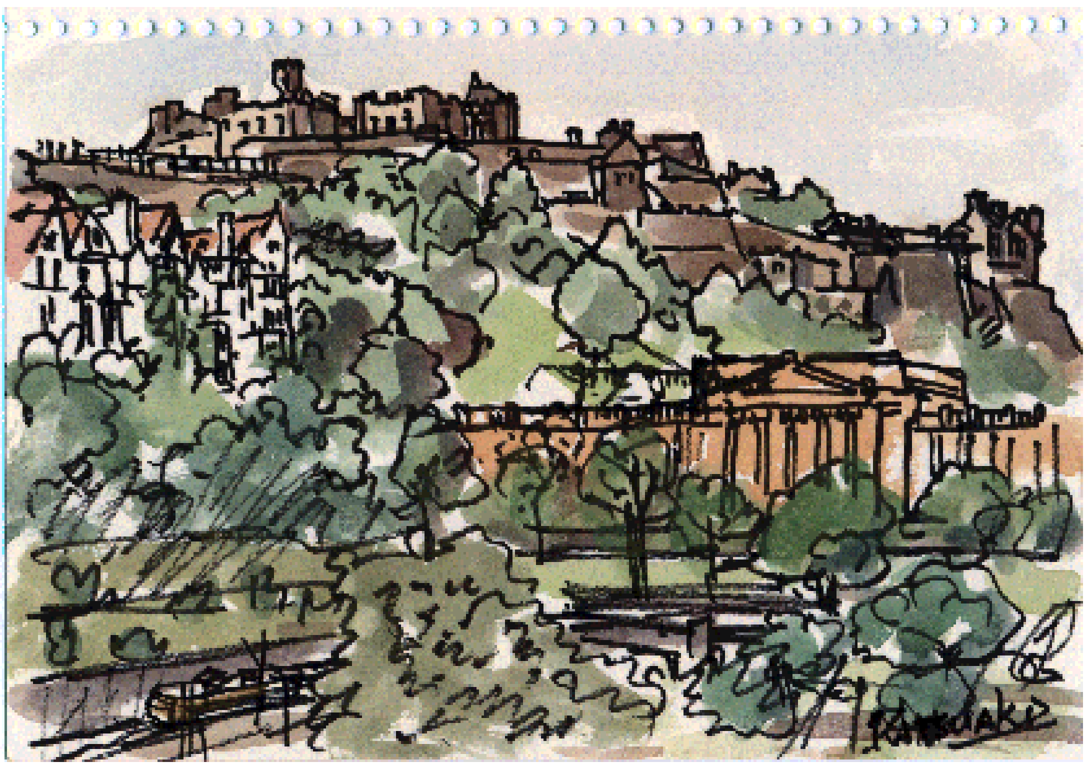
連続媒体での光の伝搬とMaxwell方程式

- 連続媒体中の光の伝わり方はマクスウェルの方程式で記述されます。
- マクスウェルの方程式は、電磁波の電界と磁界との間の関係を与える連立微分方程式であると理解しておいてください。
- 詳しい取り扱いは次回講義で詳しく述べます。

$$rot\ \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\mu_0 \tilde{\mu} \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

$$rot\ \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

James Clerk Maxwell



エジンバラ城を望む（佐藤勝昭画）

出生　1831年6月13日
エジンバラ

死去　1879年11月5日
ケンブリッジ

マクスウェル方程式

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\mu_0 \tilde{\mu} \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

電磁誘導の法則

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

アンペールの法則

変位電流

媒体の応答を与える物理量:比誘電率

- マクスウェルの方程式で表される電磁波の伝搬において、媒体の応答を与えるのが、比誘電率 ε です。
- 電束密度Dと電界Eの関係は
  $\boldsymbol{D}=\varepsilon\ \varepsilon_0\boldsymbol{E}$
  と表すことができます。ここにε_0は真空の誘電率で、 $\varepsilon_0=8.854\times10^{-12}$ F/m です。

比透磁率は1として扱う。

- 光の伝搬を考える場合$\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$と扱います。すなわち、比透磁率$\mu$は1とします。
- 磁性体中の伝搬であるから比透磁率μは1ではないと考える人があるかも知れませんね。
- 光の振動数（10^{14}-10^{15}Hz)くらいの高い周波数になると巨視的な磁気モーメントは、磁界に追従できなくなるため、透磁率を$\mu \cdot \mu_0$としたときの比透磁率μは1として扱ってよいのです。μ_0は真空の透磁率で、$\mu_0 = 1.257\times10^{-6}$ H/mと与えられます。

誘電率テンソル

$\boldsymbol{D}$ も$\boldsymbol{E}$ もベクトルなのでベクトルとベクトルの関係を与える量であるε は2階のテンソル量です。
2階のテンソルというのは、2つの添字をつかって表される量で、3×3の行列と考えてさしつかえありません。
(ここではテンソルを表すため記号～(チルダ)をつけます)

$$\boldsymbol{D} = \tilde{\varepsilon}\ \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$$

$$D_i = \varepsilon_{ij} \varepsilon_0 E_j$$

テンソル要素を使って表現すると下の式のようになります。
繰り返す添え字について総和をとるというテンソル演算の約束に従っています。

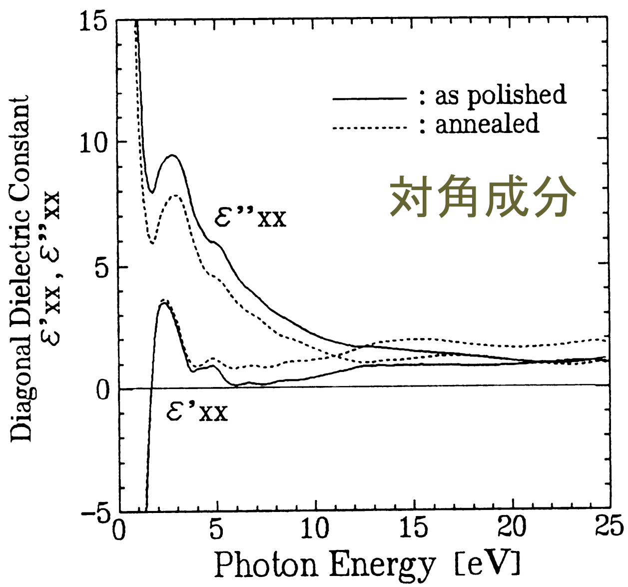
誘電率テンソルの一般的表示

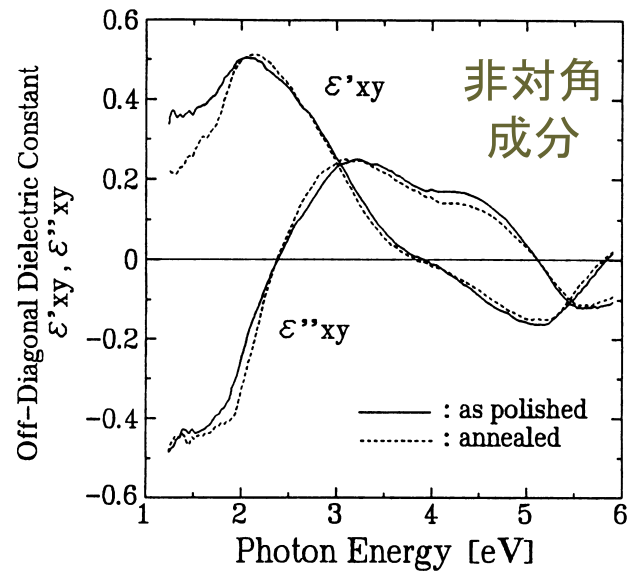
- 一般的な場合、誘電率テンソルは、下記のような9個のテンソル要素で表すことができます。各要素は複素数です。 $\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} + i\varepsilon''_{ij}$

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

誘電率スペクトルの一例:PtMnSb

- 図をご覧下さい。これは私たちが測定したPtMnSbという強磁性体の磁気光学効果に関する磁気光学スペクトルです。
- 測定したのは反射スペクトルと磁気カー効果のスペクトルですが、ここには比誘電率テンソルの対角、非対角成分のスペクトルが示されてます。
- 左が誘電率テンソルの対角成分ε *xx*、右が非対角成分ε *xy*のスペクトルです。





図の出典:「光と磁気」図6.24

なぜ誘電テンソルを用いるの?

- 屈折率、反射率やカー回転角などは、入射角や磁化の向きに依存する量で、媒体固有の応答を表す量ではありません。これに対し、誘電率テンソルは媒体に固有の物理量です。
- また、誘電率テンソルは、物質中の電子構造や光学遷移の遷移行列に直接結びつけることができ、理論計算の結果とすぐに対応できる物理量です。

等方性の媒体の誘電率テンソル

- 媒体中の光の伝搬のしかたが光の進行方向によらないとき、その媒体は光学的に等方であるといいます。
- そのときの誘電率テンソルは、スカラーと同じなので、等しい3つの対角成分ε_{xx}のみで表せます。

$$\tilde{\varepsilon}=\begin{pmatrix}\varepsilon_{xx} & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_{xx} & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_{xx}\end{pmatrix}=\varepsilon_{xx}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad (3.9)$$

異方性のある媒体の誘電率テンソル

- 磁化がないとき等方性であった媒体にz軸方向に磁化を持たせたとしますと、z軸を異方軸とする一軸異方性をもちます。(z軸に垂直な向きに関しては等方的)
- この場合、比誘電率のテンソルは、z軸のまわりの任意の角度の回転に対して不変となります。
- たとえば90°の回転C_4を施し次式となります。

$$C_4^{-1}\tilde{\varepsilon}C_4 = \tilde{\varepsilon} \qquad (3.10)$$

座標系の回転操作C4に対して、なぜ誘電率テンソルの回転が左辺のように表せるのかは、課題(1)としますので自分でやってみてください。

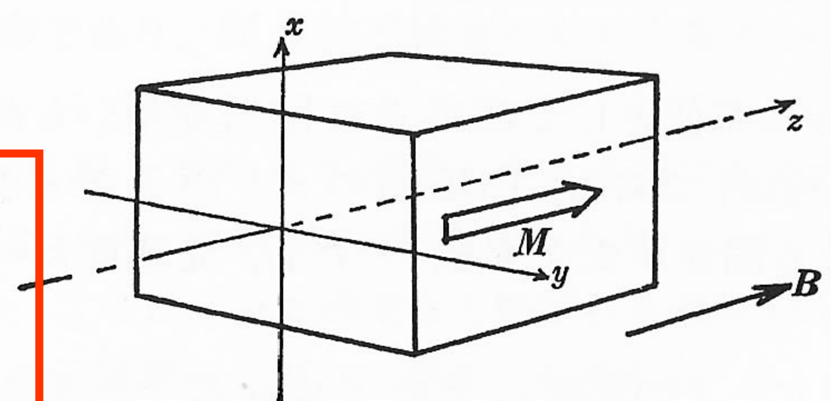


図 3.2 座標軸と磁化の向き

図の出典:「光と磁気」図3.2

誘電率テンソルに回転C4を施す

- (a)に実際にC_4の演算を施すと (b)となります。
- (a)=(b)として要素を比較すると式(3.11)が得られます。

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{(a)}$$

$$\tilde{\varepsilon}' = C_4^{-1}\tilde{\varepsilon}C_4 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{yy} & -\varepsilon_{yx} & -\varepsilon_{yz} \\ -\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xz} \\ -\varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{(b)}$$

$$\begin{gathered} \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{yx} = -\varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0 \end{gathered} \quad (3.11)$$

テンソル(a)にC4を操作して(b)になることを確かめて下さい。次にそれにもとづき(3.11)を証明して下さい。これを課題（2）とします。

ε_{zz}については何ら制約がありません。$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{zz}$である必要はありません。

磁化のある媒質の誘電率テンソル

- 従って、等方性媒質に磁化を付与したときの非誘電率εテンソルはε *xx*, ε *xy*, ε *zz*の3つの要素だけを使って、次のように簡単に書けます。

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ -\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \qquad (3.12)$$

よくある質問

- 誘電率テンソルの対角・非対角とは何ですか

  A:添え字が*xx*, *yy*, *zz*のように対角線上に来るものを対角成分、*xy*, *yz*, *zx*のように対角線上にないものを非対角成分といいます。

- もともと異方性がある場合の誘電率テンソルはどのように考えればよいのでしょう

  A: もともと1軸異方性があるとき、その対称軸に平行な磁化がある場合は、今やった等方性の場合と同じですが、磁化が任意の方向を向いているときは、全ての非対角成分が有限の値をとります。

よくある質問

- 誘電率テンソルはどのように測定するのですか。

  A:対角成分はエリプソメトリなど通常の分光学で、n、κ を求め、$\varepsilon_{xx}'=n^2-\kappa^2$, $\varepsilon_{xx}''=2n\kappa$ によって計算します。

  - 非対角成分については、磁気光学効果測定装置を用いて回転角 θ、楕円率 η のスペクトルを求め、上に述べた光学定数 n,κ を用いて計算で求めます。

$$\varepsilon_{xy}' = -\frac{2c}{\omega l}\left(n\eta + \kappa\theta\right)$$

$$\varepsilon_{xy}'' = -\frac{2c}{\omega l}\left(\kappa\eta - n\theta\right)$$

（*Faraday効果の場合*）

注：nは屈折率、κ(カッパと読む)は消光係数

磁化Mの関数としての誘電率

- さて、磁気光学効果においての各成分はMの関数ですから、は次式のように表せるはずです。

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}(M) & \varepsilon_{xy}(M) & 0 \\ -\varepsilon_{xy}(M) & \varepsilon_{xx}(M) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz}(M) \end{pmatrix} \qquad (3.13)$$

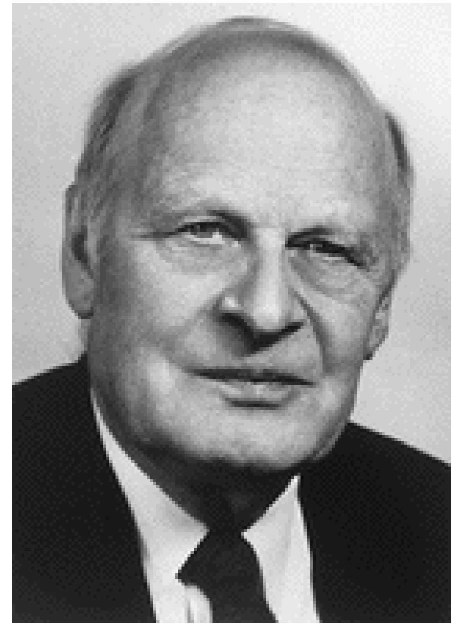
- ε $_{ij}$(M)を次式のようにMでべき級数展開します。

$$\varepsilon_{ij}(M) = \varepsilon_{ij}^{(0)} + \sum_n \frac{1}{n!} \varepsilon_{ij}^{(n)} M^n \qquad (3.14)$$

Lars Onsager

- Norwegian-American chemist and physicist.

The Nobel Prize in Chemistry 1968



磁化がある場合は非相反になる

$$\varepsilon_{ij}(-M) = \varepsilon_{ji}(M)$$

出生　1903年11月27日
　　　オスロ

死去　1976年10月5日

誘電率の成分と磁化依存性

- Onsagerの式 $\varepsilon_{ij}(-M)=\varepsilon_{ji}(M)$ (3.15) を適用すると、対角成分は
$$\varepsilon_{xx}(M)=\varepsilon_{xx}(-M)$$
となり、Mについての偶関数であることが分かる。
- 一方、非対角成分については
$$\varepsilon_{xy}(M)=-\varepsilon_{yx}(-M)$$
が成り立つので、Mについて奇関数であることがわかる

- 対角成分は***M***の偶数次のみ、非対角成分は***M***の奇数次のみで展開できます。

$$\varepsilon_{xx}(M)=\varepsilon_{xx}^{(0)}+\sum_n \varepsilon_{xx}^{(2n)}M^{2n}/(2n)!$$
$$\varepsilon_{xy}(M)=\sum_n \varepsilon_{xy}^{(2n+1)}M^{2n+1}/(2n+1)! \qquad (3.16)$$
$$\varepsilon_{zz}(M)=\varepsilon_{zz}^{(0)}+\sum_n \varepsilon_{zz}^{(2n)}M^{2n}/(2n)!$$

- ε_{xy} (***M***)がファラデー効果やカー効果をもたらし、ε_{xx} (***M***)とε_{zz} (***M***)の差が磁気複屈折（コットン・ムートン効果）の原因となります。

誘電率と導電率

- 電流密度と電界の関係は次式であらわされます。

$$J = \tilde{\sigma} E$$

$$J_i = \sigma_{ij} E_j$$

- 導電率（電気伝導率）のテンソルは

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

で表されます。

誘電率と導電率の関係

- 誘電率と導電率には右の式で表される関係があります。

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + i\frac{\sigma_{ij}}{\omega\varepsilon_0}$$

- 成分で書くと
  - 対角成分は → $$\varepsilon_{xx} = 1 + i\frac{\sigma_{xx}}{\omega\varepsilon_0}$$
  - 非対角成分は → $$\varepsilon_{xy} = i\frac{\sigma_{xy}}{\omega\varepsilon_0}$$
- 誘電率の実数部・虚数部は導電率のそれぞれ虚数部・実数部に対応します。

誘電率と導電率のどちらを使うか

- 誘電率εと導電率σには簡単な関係が成り立つので、媒質の光応答を表すときに、ε、σのいずれを用いて記述してもよいのですが、一般には、金属を扱うときはσを、絶縁体であればεを用いるのが普通です。
- 金属のεは、ω→0の極限すなわち直流においては自由電子の遮蔽効果のために発散してしまうのに対し、σは有限の値に収束するので都合がよいからです。

課題

- z方向の磁化をもつ場合の比誘電率テンソルの要素間に(3.11)式が成り立ち、その結果、誘電率テンソルは(3.12)式で与えられることを導いてください。

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{yy} \\
\varepsilon_{yx} &= -\varepsilon_{xy} \\
\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} &= \varepsilon_{zy} = 0
\end{aligned}
\qquad (3.11)
$$

$$
\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ -\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \qquad (3.12)
$$

第3回のまとめ

- 等方性の媒質がz軸方向の磁化をもったとき、その比誘電率テンソルは、3つの成分で表すことができることを学びました。
- 誘電率テンソルの対角成分は磁化の偶関数で表されるのに対し、非対角成分は磁化の奇関数で表されることを学びました。

次回の予告:磁気光学効果の式

- 次回の講義では、この誘電率テンソルをマクスウェルの方程式に代入して複素屈折率Nの固有値を求めます。

固有方程式は右の式になるので任意のEに対して式が成立する条件から複素屈折率の固有値が求められます。

$$\begin{pmatrix} \hat{N}^2-\varepsilon_{xx} & -\varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \hat{N}^2-\varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}=0$$

$$\hat{N}_{\pm}^2=\varepsilon_{xx}\pm i\varepsilon_{xy}$$

ここでN_+とN_-に対応する固有関数はそれぞれ右円偏光、左円偏光であることが導かれます。さらに、非対角成分ε_{xy}が無ければ、左右円偏光の応答に差がなく、光学活性が生じないということを学びます。