

# 基礎から学ぶ光物性

## 第2回 光が物質中

▶ を伝わるとき：

東京農工大学

佐藤勝昭

## 第2回講義で 学ぶこと

光が物質中を伝わる時何が起きるか：屈折率とは何か？消光係数とは？吸収係数・透過率との関係は ここでは、屈折率  $n$ 、消光係数  $k$  がどのように定義された量であるかを電磁波の伝わり方をあらわす式を用いて説明します。マクスウェルの方程式の固有解を求めることによって、光学定数と光学誘電率の関係を導きます。（電磁気学の練習問題です）

なお、ここでは、波を表現する数式に三角関数ではなく exponential を使い、複素数を扱います。この扱いに不慣れな生命系・物質系の学生のために数学的な基礎も解説します。

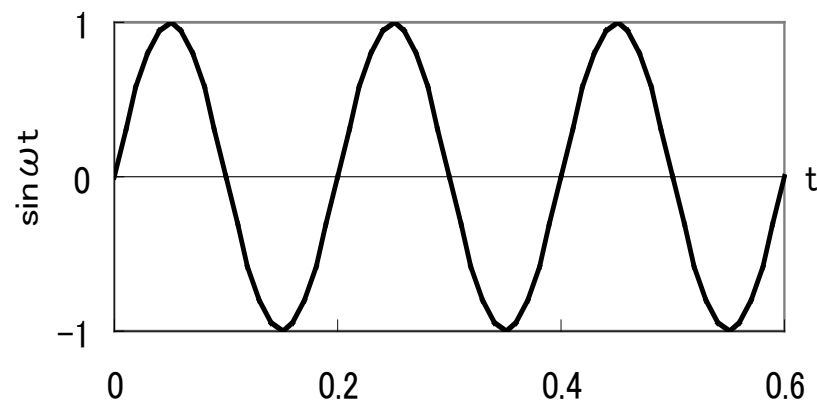
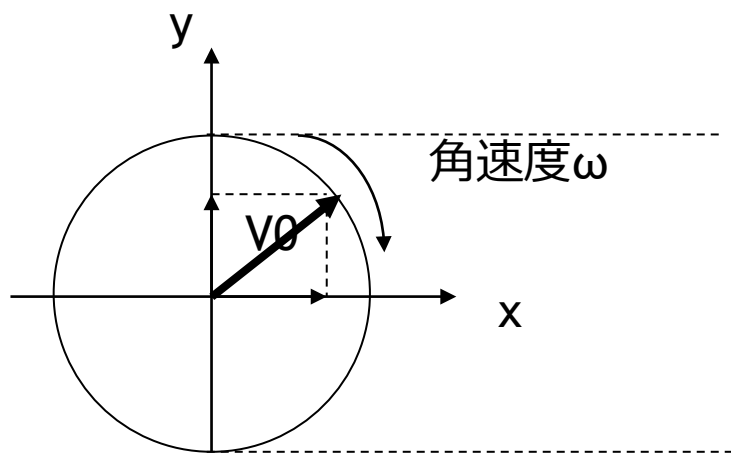
# 光学現象の巨視的機構 – 物質中の光の伝搬

- ▶ 等方性連続媒質の中の光の伝搬
- ▶ 異方性媒質中の光の伝搬 – 複屈折と光学遅延

(付録) 復習：波動を指数関数で表す

## 波を表す数式

- ▶ 三角関数をつかって波動をあらわせることはよく知っていますね。たとえば、交流の電圧は、 $V=V_0 \sin \omega t$ と書き表すことができます。
- ▶ これは、 $xy$ 平面において一定の角速度 $\omega$ で回転しているベクトルの $y$ 成分の時間変化を表しています。



## 三角関数をexp関数であらわす。

- ▶ あとから出てきますが、波動方程式は微分を使います。
- ▶ 正弦関数 $\sin \omega t$ を微分すると $\cos \omega t$ となり、 $\cos \omega t$ を微分すると $\sin \omega t$ になります。このように波を表すのに三角関数を用いると微分するたびに形が変わります。

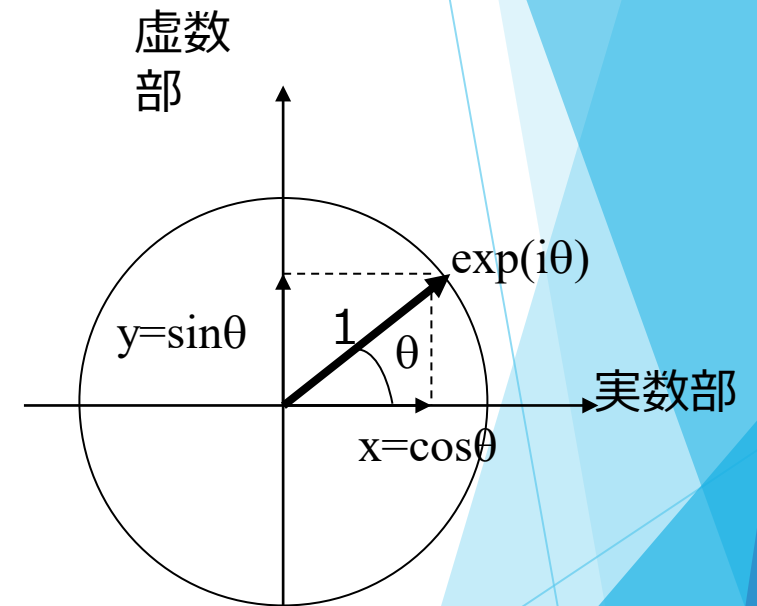
$$\frac{d}{dt} \sin \omega t = \omega \cos \omega t, \quad \frac{d}{dt} \cos \omega t = -\omega \sin \omega t$$

- ▶ もし三角関数の代わりに指数関数(exponential function) $e^{i\omega t}$ を用いますと何度微分しても形は変わりません。ここに $i$ は虚数単位です。

$$\frac{d}{dt} \exp(i\omega t) = i\omega \exp(i\omega t)$$

## オイラーの公式

- ▶ 実数部 $x$ と虚数部 $y$ をもつ複素数 $c$ は  $c=x+iy$ とあらわすことができます。
- ▶ 振幅 1 で位相角が $\theta$ の複素数 $\exp(i\theta)$  をベクトル表示すると、ベクトルの軌跡は円を表します。 $xy$ 各成分は、 $x=\cos\theta$ で、 $y=\sin\theta$ となります。
- ▶ 従って、 $\exp(i\theta)=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ と書けます。これをオイラーの公式とよびます。



(付録) 復習：波動を指数関数で表す

## 三角関数を指数関数で表す

- ▶ オイラーの式より

$$\exp(i\theta) = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\exp(-i\theta) = e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

- ▶ 逆に解いて

$$\cos\theta = \{\exp(i\theta) + \exp(-i\theta)\} / 2 = (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) / 2$$

$$\sin\theta = \{\exp(i\theta) - \exp(-i\theta)\} / 2i = (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) / 2i$$

- ▶ 波の式を表す場合に  $\cos\omega t$  の代わりに  $e^{i\omega t}$  を使いますが、暗黙のうちに「**expの形で演算し最後は実数部をとる**」ことが前提となっています。
- ▶ 電気工学の交流理論では、電流を表すために  $i$  を使うので、虚数単位を  $j$  で表し波動を  $e^{j\omega t}$  で表すのが普通です。

(付録) 復習：波動を指数関数で表す

## 時間と位置の関数としての波の式

- ▶  $x$ 方向に進む波動は $\cos(\omega t - kx)$ と書けます。cosの( )内は位相と呼ばれます。 $\omega$ は角振動数、 $k$ は波数です。
- ▶ 位相が一定になるところを追いかければ、位相速度 $v$ を求めることができます。
- ▶ 位相が一定ならば、 $d(\omega t - kx) = 0$   
これより、 $\omega dt - k dx = 0$ となりますから位相速度として  
 $v = dx/dt = \omega/k$ が得られます。
- ▶ 逆に、波数は $k = \omega/v$ と表されます。
- ▶ 速度を使って書くと波動は $\cos\{\omega(t - x/v)\}$ と表すことができます。



(付録) 復習：波動を指数関数で表す

## 時間と位置の指数関数で表す

- ▶ オイラーの公式 を使って指数関数で表すと波動を  $(e^{i\omega t - ikx} + e^{-i\omega t + ikx})/2$  と表すことができます。
- ▶ あるいは、波動を  $e^{i\omega t - ikx}$  または  $e^{-i\omega t + ikx}$  で表しておき、微分方程式などを解いて、得られた解の実数部をとるというやり方をとります。
- ▶ 以下では、波動を  $e^{-i\omega t + ikx}$  で表して話を進めますが、 $e^{-i\omega t}$  のところで述べたのと同じく、実数部のみが意味をもつということが暗黙の了解になっています。

# 連続媒質中の光の伝搬

- ▶ 連続媒質中を  $x$  方向に進む光の電界ベクトル  $E$  は

$$E = E_0 e^{-i\omega t + ikx} \quad (1)$$

で表されます。上式において  $k$  は波数とよばれ、空間的な周波数をあらわします。波長を  $\lambda$  とすると、波数は波長  $\lambda$  の逆数に  $2\pi$  をかけたものとして定義されます。従って  $k = 2\pi/\lambda$  です。

- ▶ 前に述べたように  $k = \omega/v$  ですが、媒体中では  $v$  が光速の屈折率  $n$  分の1になっています。すなわち、 $v = c/n$  ですから、

$$k = n\omega/c \quad (2)$$

と表されます。光速  $c$  は周波数  $\omega/2\pi$  と波長  $\lambda$  の積なので、 $k = 2\pi n/\lambda = 2\pi/(\lambda/n)$  と書くことができ、媒質中の光の波長が屈折率分の1になっていることと対応しています。

# 吸収のある場合：複素屈折率の導入

- ▶ 現実の媒質では吸収が存在します。吸収を表す光学定数が消光係数 $\kappa$ です。吸収がある場合は、波数を表す式(2)は屈折率 $n$ だけでは表すことができません。屈折率の代わりに、屈折率 $n$ を実数部、消光係数 $\kappa$ を虚数部とする複素屈折率 $N=n+i\kappa$ に置き換える必要があります。すなわち

$$k=N\omega/c=n\omega/c +i\kappa\omega/c \quad (3)$$

- ▶ このように複素屈折率を導入すると波動を指数関数で表したときに都合がよいからです。(3)を(1)に代入すると、次式のようにになります。

$$E = E_0 e^{-i\omega t + iN\omega x/c} = E_0 e^{-i\omega t + i(n+i\kappa)\omega x/c} = E_0 e^{-\kappa\omega x/c} e^{-i\omega(t-nx/c)} \quad (4)$$

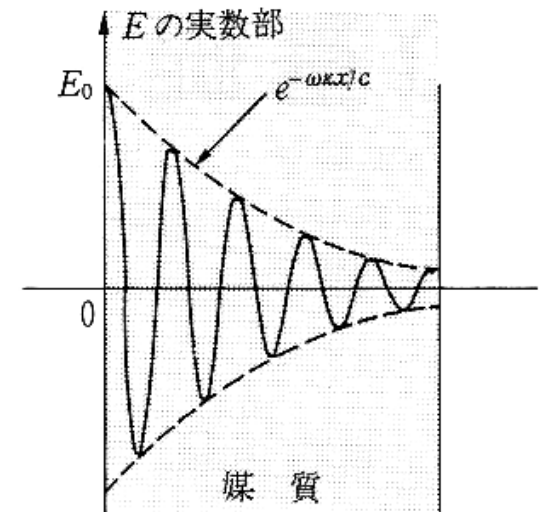
# 消光係数 $\kappa$ の意味

- ▶ 式(4)の、最初の因子 $e^{-\omega\kappa x/c}$ は振幅が距離とともに減衰していく様子を表し、二番目の因子 $e^{-i\omega(t-nx/c)}$ が波の伝搬していく様子を表します。
- ▶ 光の強度 $I$ は電界の振幅の絶対値の二乗に比例する量ですから、

$$I \propto |E|^2 = E_0^2 e^{-2\omega\kappa x/c} \quad (5)$$

で表されます。この式は、光が物質中を進むときに吸収を受けて弱くなっていく様子を表します。

- ▶ このように、 $\kappa$ は光の減衰を表すので消光係数(extinction coefficient)とよびます。



式(3.2)で $t=0$ として、 $E$ の実数部、 $E_0 e^{-\omega\kappa x/c} \cos\left(\frac{\omega n x}{c}\right)$ を示す

# 消光係数と吸収係数

- ▶ 媒体による光の吸収の強さを表すのが吸収係数 $\alpha[\text{cm}^{-1}]$ です。吸収係数は入射光の強度が $1/e$ になるまでに光が進む距離の逆数です。すなわち、媒体中を、0から $x[\text{cm}]$ まで光が進んだとき、 $x=0$ において $I(0)$ であった光強度が $x$ においては $I(x)$ になっていたとすると、

$$I(x)=I(0)e^{-\alpha x} \quad (6)$$

として、吸収係数 $\alpha$ が定義されます。吸収係数と消光係数の関係は、式 (5) と式 (6) を比較して

$$\alpha=2\omega\kappa/c=4\pi\kappa/\lambda \quad (7)$$

が得られます。ここに $\lambda$ は波長を表します。

# 複素屈折率 $N=2.5+0.5i$ , 厚さ $1\ \mu\text{m}$ の媒体を 波長 $\lambda=500\ \text{nm}$ の光が透過するとき

- ▶  $N=2.5+0.5i$ ということとは $n=2.5$ ,  $\kappa=0.5$ 。  
 $\omega=2\pi/5\times 10^{-7}=4\pi\times 10^6[\text{rad/s}]$   
 $n\omega x/c=2\pi n x/\lambda=5\times 3.14\times 10^{-6}/5\times 10^{-7}=31.4$   
 $\kappa\omega x/c=2\pi\kappa x/\lambda=3.14\times 10^{-6}/5\times 10^{-7}=6.28$
- ▶  $E(x)=E_0 e^{-\kappa\omega x/c} e^{-i\omega(t-nx/c)} = E_0 e^{-6.28} e^{-i\omega t - i31.4}$
- ▶ 吸収係数 $\alpha=4\pi\kappa/\lambda=2.51\times 10^7[\text{m}^{-1}]=2.51\times 10^5[\text{cm}^{-1}]$   
 $I(x)=I(0)\times e^{-12.56}=3.50963\times 10^{-6}$  強く減衰します。  
媒体中の波長 $=\lambda/n=200\ [\text{nm}]$   
 $n\omega x/c=2\pi n x/\lambda=5\times 3.14\times 10^{-6}/5\times 10^{-7}=31.4$

# マクスウェルの方程式

- ▶ 電磁波の伝搬はマクスウェルの方程式で表すことができます。

$$\text{rot}\mathbf{H}=\partial\mathbf{D}/\partial t+\mathbf{J} \quad (8)$$

$$\text{rot}\mathbf{E}=-\partial\mathbf{B}/\partial t$$

- ▶ ここに、 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$ は、それぞれ、電界[V/m]、磁界[A/m]を表すベクトル量です。
- ▶ また、 $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{J}$ は、それぞれ、電束密度[C/m<sup>2</sup>]、磁束密度[T(テスラ)]、電流密度[A/m<sup>2</sup>]を表します。

# 等方性媒体中の光の伝搬

▶ 媒質が等方的であり、外部磁界や外部電界などを加えなければ、 $\mathbf{D}$ と $\mathbf{E}$ の関係、 $\mathbf{B}$ と $\mathbf{H}$ の関係、および、 $\mathbf{J}$ と $\mathbf{E}$ の関係は、スカラーの比誘電率  $\epsilon_r$ 、比透磁率  $\mu_r$ 、および、導電率  $\sigma$  を用いて、

$$\mathbf{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H} \quad (9)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

と書き表されます。 $\epsilon_0$ 、 $\mu_0$ は真空の誘電率および透磁率です。ここに、 $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ であることに注意しましょう。



# 比誘電率と比透磁率

- ▶ 光の周波数 ( $\sim 10^{14}\text{Hz}$ ) に対しては、比誘電率 $\varepsilon_r$ は複素数で表され、一般に

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r' + i\varepsilon_r'' \quad (10)$$

と書き表すことができます。

- ▶ 一方、比透磁率 $\mu_r$ は光の周波数においては1とみなせます。
- ▶ また、伝導電流を変位電流にくりこむことによって、(10)式の第1式の $J$ は省略でき、第2式と対称性のよい関係となります。
- ▶ ここで、 $E$ 、 $H$ に(4)式のような時間、距離依存性を仮定すると、マクスウェルの方程式は次の問題1にあるように

$$(N^2 - \varepsilon_r) E = 0 \quad (11)$$

となります。この方程式が $E \neq 0$ なる解を得るためには

$$N^2 = \varepsilon_r \quad (12)$$

でなければなりません。

# 問題1 固有方程式(11)を導いてください。

## 略解

式(8) を用いて式(7)の 2 つの式から  $H, B$  を消去すると

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = -\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0 \partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2 = -(\varepsilon_r / c^2) \partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2 \quad (\text{a})$$

▶ ベクトル解析の公式から

$\text{rot rot } \mathbf{E} = \text{grad}(\text{div } \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}$ 、ここに  $\text{div } \mathbf{E} = 0$  の関係を用いました。

▶ この式に  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega(t-Nx/c)}$  を代入すると

$\text{rot rot } \mathbf{E} = (\omega N / c)^2 \mathbf{E}$ 、従って式(a)は

$$\text{▶ } (\omega^2 N^2 / c^2) \mathbf{E} = (\omega^2 \varepsilon_r / c^2) \mathbf{E} \quad (\text{b})$$

▶ となって(11)式が得られました。

# 複素屈折率と複素誘電率

- ▶ 式(12)に、 $N=n+i\kappa$ 、 $\varepsilon_r=\varepsilon_r'+i\varepsilon_r''$ を代入して実数部どうし、虚数部どうしを比較すると

$$\varepsilon_r' = n^2 - \kappa^2 \quad (13)$$

$$\varepsilon_r'' = 2n\kappa$$

という関係が導かれます。

- ▶ **透明媒体**を扱っているときは、吸収が0すなわち $\kappa=0$ とみなせるので、第1式から

$$\varepsilon_r = n^2 \quad (14)$$

となります。

# 比誘電率から屈折率を求める

- ▶  $\epsilon_r = n^2$ の式を使うと、比誘電率がわかれば屈折率のおよその見積もりをすることができます。
- ▶ たとえば、Si単結晶の比誘電率 $\epsilon_r$ は11.9です。上式を使うとSiの透明領域の屈折率が $n=3.44$ と求められます。

# 複素誘電率から光学定数を求める

- ▶ (13) から、 $n$ 、 $\kappa$ を $\varepsilon$ の関数として求めると、

$$n^2 = (|\varepsilon| + \varepsilon_r') / 2 \quad (15)$$

$$\kappa^2 = (|\varepsilon| - \varepsilon_r') / 2$$

- ▶ が得られます。  
ここに、 $|\varepsilon| = (\varepsilon_r'^2 + \varepsilon_r''^2)^{1/2}$ です。

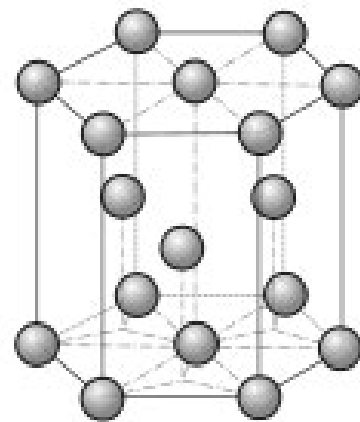
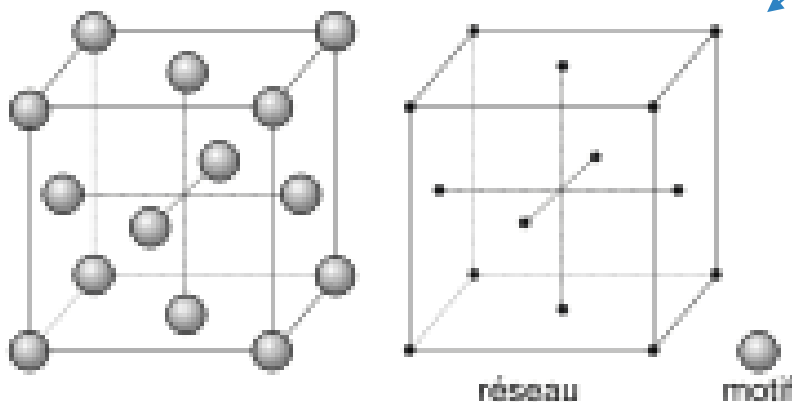
# 異方性媒質中の光の伝搬 － 複屈折と光学遅延 －

## ▶ 等方性vs異方性

等方性：誘電率が方位に依存しない。例：GaAs

異方性：誘電率が方位に依存する。例：GaN

▶ 一軸異方性：特定の方位とそれに垂直な方位とで値が異なる



# 誘電率テンソル

- ▶ 特定の方向（いま、 $x$ 軸としておく）の誘電率の成分が、それに垂直な方向の誘電率の成分と異なる場合、異方性があるという。異方性のある場合、電界ベクトル $E$ の向きと電束密度ベクトル $D$ の向きは一般に平行ではない。従って、 $D = \epsilon_0 \epsilon_r E$ の式において、比誘電率 $\epsilon_r$ はスカラーではなくテンソルを使って、次式で表さなければなりません。

$$\tilde{\epsilon}_r = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & & \\ & \epsilon_{yy} & \\ & & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (16)$$

- ▶ ここで、問題を簡単にするために、 $x$ 方向が、 $y$ 、 $z$ 方向と異なるような一軸異方性を持つとしましょう。（ $x$ 軸を光軸といいます。）このとき $\epsilon_{xx} \neq \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz}$ となるので、 $\epsilon$ テンソルは $\epsilon_{xx}$ と $\epsilon_{zz}$ の2成分で記述できます。

$$\tilde{\epsilon}_r = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & & \\ & \epsilon_{zz} & \\ & & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

# 異方性媒質中の光の伝搬

## (1)光軸（x方向）に進む波

- ▶ x方向に進む波とz方向に進む波の2つの場合についてのみ考察しましょう。
- ▶ 式（4）で表されるx方向に進む波についてマクスウェルの方程式を適用すると、永年方程式は

$$\begin{pmatrix} -\epsilon_{xx} & & \\ & N^2 - \epsilon_{zz} & \\ & & N^2 - \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \mathbf{E} = 0 \quad (17)$$

となるので、 $N$ の固有値は

$$N^2 = \epsilon_{zz} \quad (18)$$

のみとなり、あたかも屈折率 $\epsilon_{zz}^{1/2}$ の等方性媒質中を伝搬する波のように伝搬するのです。



# 異方性媒質中の光の伝搬

## (2)光軸に垂直(z方向)に進む波

- ▶ 異方性軸に垂直の方向（z軸方向）に進む波

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega(t - Nz/c)} \quad (19)$$

についての永年方程式は

$$\begin{pmatrix} N^2 - \epsilon_{xx} & & \\ & N^2 - \epsilon_{zz} & \\ & & -\epsilon_{zz} \end{pmatrix} \mathbf{E} = 0 \quad (20)$$

となる（問題2参照）ので、 $N$ の固有値は

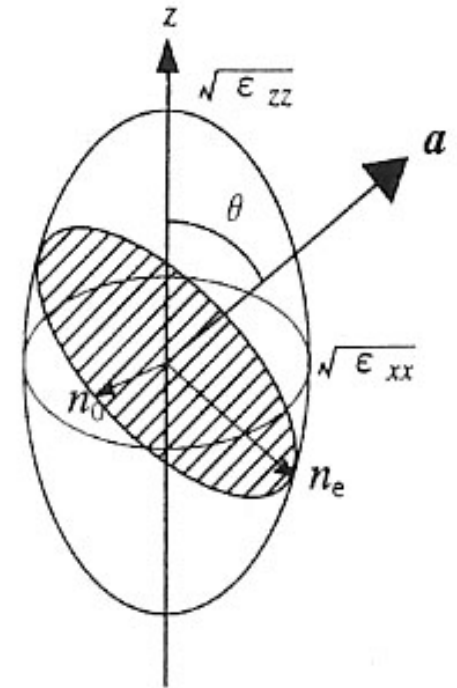
$$N^2 = \epsilon_{xx} \text{ または、 } N^2 = \epsilon_{zz} \quad (21)$$

となって、2つの値を持ちます。

- ▶ それぞれに対応する固有関数は、 $x$ 方向に偏り屈折率 $\epsilon_{xx}^{1/2}$ をもつ波と、 $x$ 軸に垂直な $y$ 方向に偏り、屈折率 $\epsilon_{zz}^{1/2}$ をもつ波です。

# 複屈折(birefringence)と屈折率楕円体(indicatrix)

- ▶  $z$ 方向に進む波は、電界の $x$ 成分と $y$ 成分とで異なる屈折率を見ることとなります。これを複屈折といいます。
- ▶ 方解石を用いて文字を見ると二重に見えますが、これは、異常光線がスネルの法則に従わないからです。
- ▶ 一軸異方性をもつ物質の任意の入射方向に対する屈折率は図のような屈折率楕円体で表すことができ、常光線については、 $n = \epsilon_{zz}^{1/2}$ の球で、異常光線については、回転軸方向の屈折率が $n = \epsilon_{zz}^{1/2}$ でそれに垂直な方向の屈折率が $n = \epsilon_{xx}^{1/2}$ であるような回転楕円体によって表されます。



$$\frac{1}{n_e^2} = \frac{\sin^2 \theta}{\epsilon_{zz}} + \frac{\cos^2 \theta}{\epsilon_{xx}}$$
$$n_o = \sqrt{\epsilon_{xx}}$$

一軸異方性媒体における  
屈折率楕円体

# 異方性媒体と光学遅延

- ▶ ここでは簡単のために誘電率が実数であると仮定します。
- ▶ 電界ベクトルが  $xy$ 面内で  $x$ 軸から  $45^\circ$  傾いているような偏光がこの媒体の  $z$ 方向に入射したとします。媒体中を  $z$ 方向に長さ  $z$ だけ進んだ位置での電界をみると、 $x$ 成分の位相変化は  $\omega \varepsilon_{xx}^{1/2} z/c$  であるのに対し、 $y$ 成分の位相変化は  $\omega \varepsilon_{zz}^{1/2} z/c$  であるから差し引きすると

$$\delta = \omega(\varepsilon_{xx}^{1/2} - \varepsilon_{zz}^{1/2})z/c \quad (22)$$

の位相差を受けることになります。この位相差  $\delta$  のことを光学的遅延（リターデーション）と呼んでいます。

# リターデーションと円偏光

- ▶ リターデーション $\delta$ が $\pm\pi/2$ （4分の1波長）となると、電界ベクトルの軌跡は円になります。これを円偏光と呼びます。 $\delta$ が $\pm\pi$ （半波長）となると、電界ベクトルの軌跡は入射光と $90^\circ$ 傾いた直線偏光となります。
- ▶ 水晶やサファイアなど異方性を持つ結晶を適当な厚みに切り出すと、4分の1波長板や半波長板を作ることができます。一般にこのような光学素子を移相板と呼んでいます。直線偏光子と4分の1波長板を組み合わせると円偏光を作ることができます。

## 第2回のおわりに

- ▶ 光の伝搬は光学定数を使って表すことができました。屈折率は、媒体中での光の速度を、消光係数は媒体中での光の減衰を表すことを学びました。
- ▶ 複素誘電率から光学定数を求めることができます。この関係はマクスウェル方程式を解くことによって得られました。
- ▶ 異方性のある媒体の屈折率は、屈折率楕円体で表され、光の伝搬方向に依存することがわかりました。